Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt und Linearkombinationen

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Frage:

Existiert auch ein Produkt von zwei Vektoren, wo als Ergebnis wieder ein Vektor herauskommt?

Antwort:

Ja aber nur für dreidimensionale Vektoren, d.h. mit drei Komponenten.

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Offene Fragen:

- Was bedeutet diese Produkt?
- Wie berechnen wir es?
- Wo wird es angewendet?

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Drehung im Raum

Wir betrachten einen Punkt der um eine vorgegebene Drehachse rotiert…

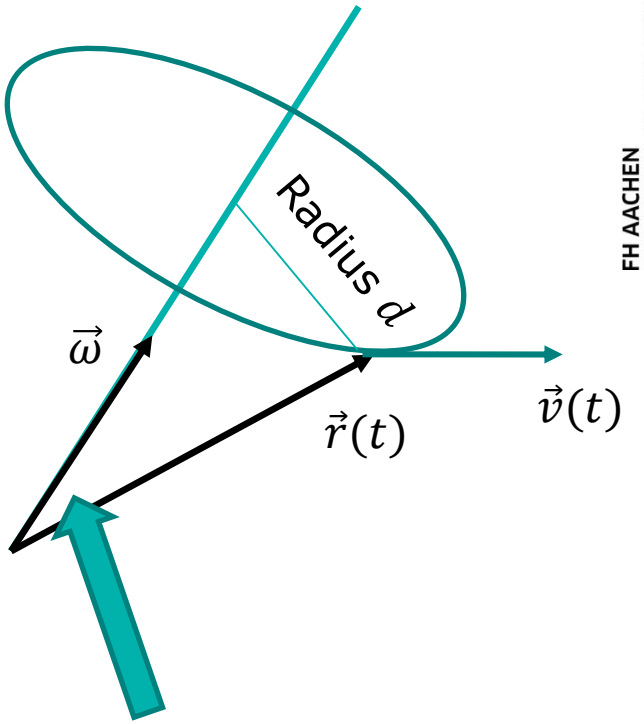
Wir suchen die Momentangeschwindigkeit…

Für den Betrag der Geschwindigkeit gilt dann…

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot d = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}(t)| \cdot \sin\alpha$$

Was ist die Richtung von $\vec{v}$?

$\vec{v} \perp \vec{\omega}$ und $\vec{v} \perp \vec{r}(t)$



Mathematische Objekte: Vektoren

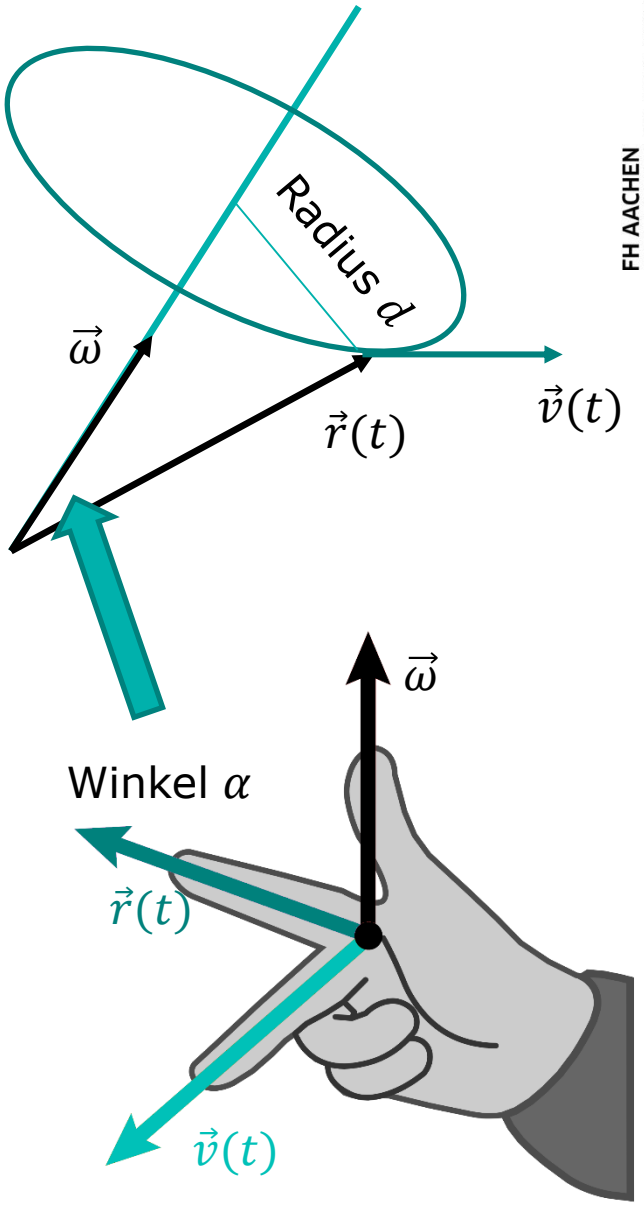
Vektorprodukt

Drehung im Raum

Zusammenfassung…

Wir suchen zu den Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{r}(t)$ einen neuen Vektor $\vec{v}$ mit folgenden Eigenschaften…

- $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}(t)| \cdot \sin\alpha$
- $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ und $\vec{v} \perp \vec{r}(t)$
- $\vec{v}$ bildet mit $\vec{\omega}$ und $\vec{r}(t)$ ein Rechtssystem



Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

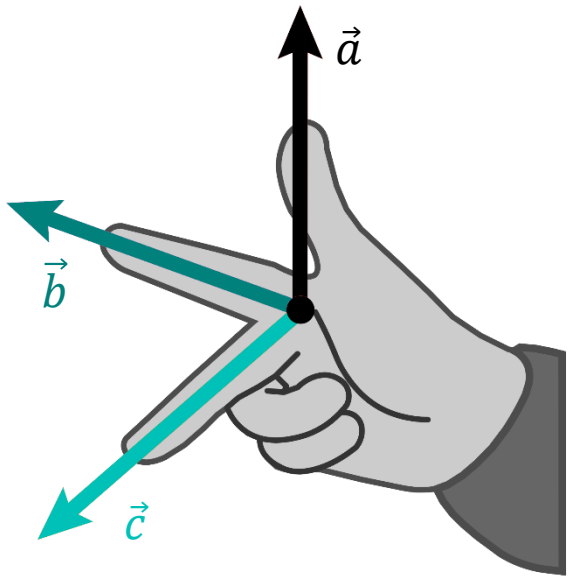
Definition

Wir definieren für zwei dreidimensionale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ durch:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$

- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

- Die drei Vektoren bilden ein Rechtssystem



Wenn wir die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben haben, berechnet sich das Vektorprodukt wie folgt:

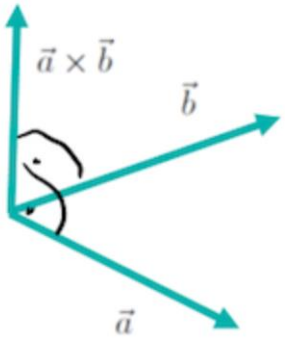
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

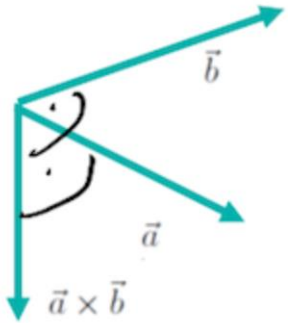
Vektorprodukt

Jetzt sind Sie an der Reihe...

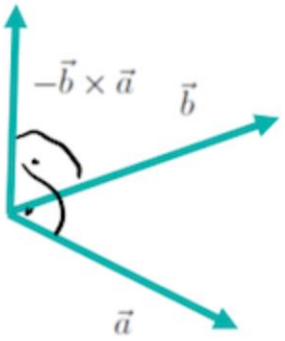
Welche Darstellung/Benennung ist richtig und welche nicht?



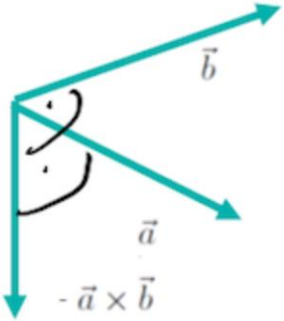
korrekt



falsch



korrekt



korrekt

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht zu den beiden folgenden Vektoren ist…

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -37 \\ 26 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

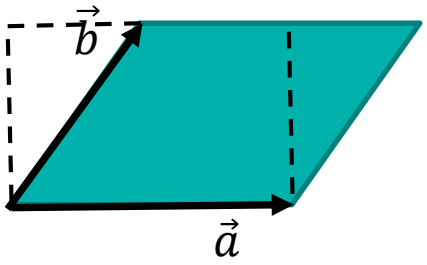
Vektorprodukt

Veranschaulichung als Fläche

Der Betrag des Vektorproduktes kann anschaulich als Fläche des Parallelogramms aufgefasst werden, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufspannen…

Höhe:

$$\left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$$



Für die Fläche gilt also:

$$A = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Sie sind an der Reihe...

Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.



Es gilt $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Wir erhalten:



$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit: $A = \sqrt{171}$

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Weitere Anwendungen

Zahlreiche Größen in der Physik werde mit Hilfe des Vektorprodukts berechnet…

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Rechenregeln

Für das Vektorprodukt gelten die folgenden Rechenregeln:

Anti-Kommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Distributivität: $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Assoziativität: $\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right)$

Es gilt weiter: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Mathematische Objekte: Vektoren

Vektorprodukt

Herleitung der Formel

Wenn wir mit den Komponenten der Vektoren rechnen, woher kommt die komplizierte Formel?

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Wir benötigen zur Herleitung die Rechenregeln für das Vektorprodukt, die geometrische Definition und die Darstellung der Vektoren durch die Standardbasis…

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e}_x} + a_y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{e}_y} + a_z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{e}_z}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

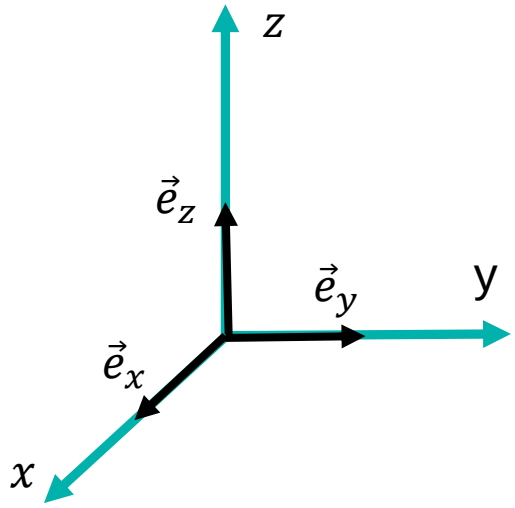
Vektorprodukt

Herleitung der Formel

Es gilt dann…

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z\right) \times \left(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z\right)$$

$$= a_x b_x \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_x}_{=\vec{0}} + a_x b_y \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{=\vec{e}_z} + a_x b_z \underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{=-\vec{e}_y} + \cdots$$



Wir vergleichen…

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Ein Beispiel…

Stücklisten:

Wir verkaufen Spielzeugautos…

Wir haben jeweils 5x Set 1 und 3x Set 2 im Laden.



Farbe	Einzeln	Set 1	Set 2
Blau	10	1	2
Rot	5	1	0
Gelb	3	1	2
Grün	7	1	0
Schwarz	0	1	2

Wie viele Autos habe ich im Laden?

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 14 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Linearkombination

Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Wo begegnen uns Linearkombinationen?

Wir gehen zurück zur Herleitung beim Skalar- und Vektorprodukt…

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \qquad = \vec{e}_y \qquad = \vec{e}_z$$

$$= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

Linearkombination

Beobachtung:

Wir können jeden Vektor mit drei Komponenten als eindeutige Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ schreiben.



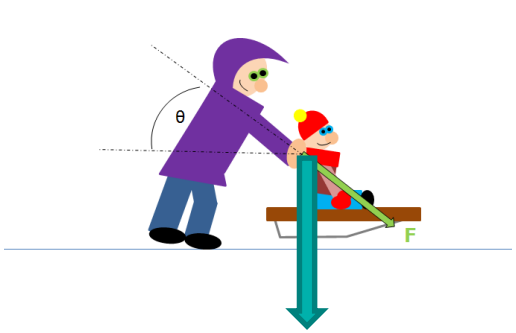
Basis

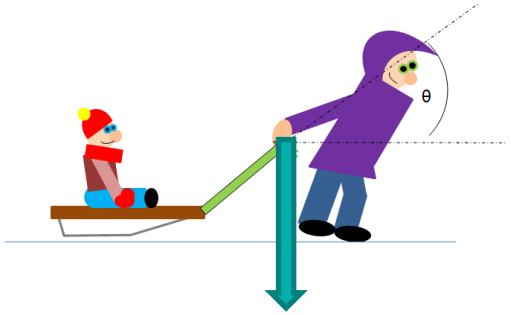
Mathematische Objekte: Vektoren

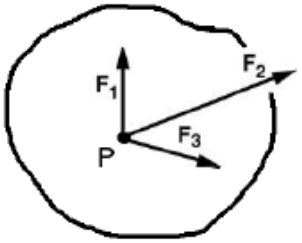
Linearkombinationen

Wo begegnen uns Linearkombinationen?

Kräfteparallelogramm (verschiedene Kräfte werden addiert):







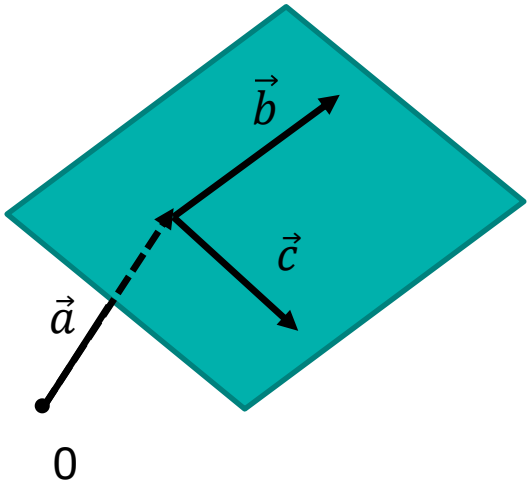
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Ebenen…

Wir kennen evtl. noch aus der Schule die Darstellung einer Ebene in Parameterform…



Ziel:

Beschreibe alle Punkte auf der Ebene durch eine Formel, die Vektoren verwendet.

1. Vektor auf die Ebene (Stützvektor)
2. Vektor welche die Ebene aufspannen (Spannvektoren)

Wir erhalten dann jeden Punkt als Linearkombination:

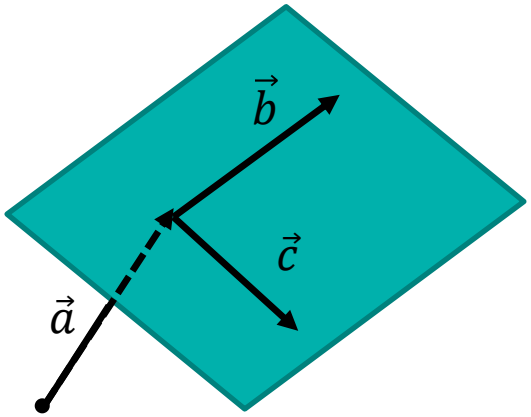
$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$$

Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Ebenen…

Wir schauen uns die Ebenengleichung genauer an…

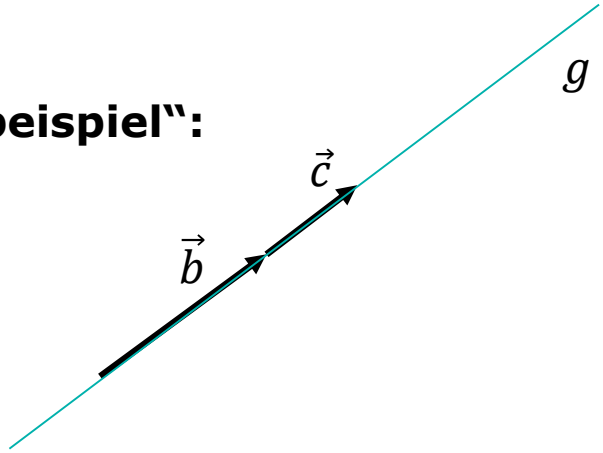


$$\vec{x} = \vec{a} + \underbrace{\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}}$$

Spannvektoren, spannen die Ebene auf…

Welche Eigenschaften brauchen wir, damit die Vektoren die Ebene aufspannen?

„Gegenbeispiel":

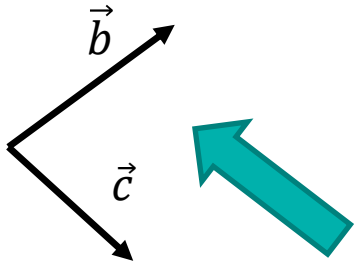


Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Spannvektoren der Ebene

Damit die beiden Vektoren die Ebene aufspannen, müssen sie „in verschiedene Richtungen zeigen"…

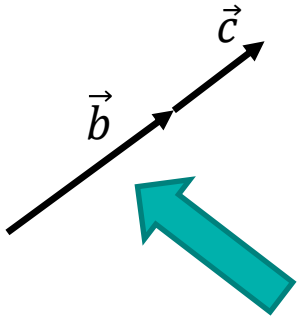


Wie können wir das mathematisch etwas exakter (formaler) beschreiben?

Wir betrachten die folgende Linearkombination…

nur triviale Lösung

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$$



$\vec{c}$ ist ein Vielfaches von $\vec{b}$

Die Linearkombination besitzt eine nicht-triviale (=nicht null) Lösung

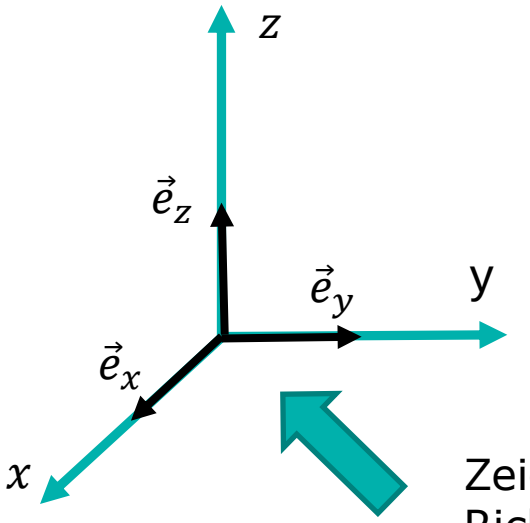
Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Ein weiteres Beispiel…

Wir betrachten die drei Vektoren…

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



Wir betrachten die Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

nur triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Zeigen in „verschiedene Richtungen“ bzw. spannen den kompletten Raum auf

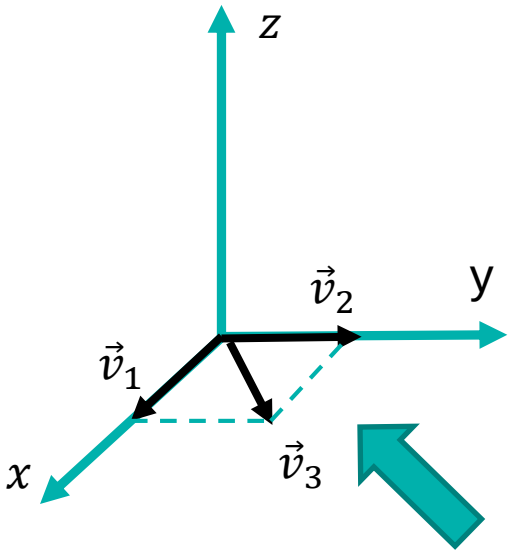
Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Ein weiteres Beispiel…

Wir betrachten die drei Vektoren…

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$



Wir betrachten die Linearkombination:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

mögliche Lösung $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1\,,\ \lambda_3 = -1$

Liegen in einer Ebene und
spannen nur die Ebene auf

Mathematische Objekte: Vektoren

Linearkombinationen

Definition: Linear unabhängige Vektoren

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ aus einem Vektorraum V sind linear unabhängig, genau dann wenn die Linearkombination des Nullvektors

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ besitzt.

Existiert eine nicht-triviale Lösung, bei der nicht alle Koeffizienten null sind, so werden die Vektoren linear abhängig genannt.